Avaliação do Desempenho de Optimizadores Estocásticos

Viviane Grunert da Fonseca[1,2]

[1] Instituto Universitário Dom Afonso III (INUAF)

[2] Centro de Estudos de Gestão, Instituto Superior Técnico, Unversidade Técnica de Lisboa (CEG-IST)

viviane.grunert@vodafone.pt

2ª Escola Luso-Brasileira de Computação Evolutiva, Guimarães, 18 de Julho de 2010

Avaliação do Desempenho de **Optimizadores Estocásticos**

→ Já conhecemos vários optimizadores **evolutivos**:

- algoritmos genéticos, estratégias evolutivas,
- algoritmos de colónias de formigas, etc.

`condição inicial`	→	`estratégia de procura`	→	`soluções/resultados no espaço de/dos decisão/objectivos`
determinística		determinística		determinísticos
aleatória		determinística		aleatórios
determinística		aleatória		aleatórios
aleatória		aleatória		aleatórios

→ Em geral, os algoritmos evolutivos são **optimizadores estocásticos** (OE) e produzem soluções/resultados aleatórios.

→ Existem também outros OEs que não são algoritmos evolutivos, como p. ex. o *simulated annealing* que imita um processo de arrefecimento.

→ Tanto as soluções produzidas por um OE no espaço de decisão como os resultados correspondentes no espaço dos objectivos seguem uma **distribuição de probabilidades**.

→ Caso simples no espaço dos objectivos:

$$P(\text{resultado} = x_i) = p_i, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

O conjunto de resultados possíveis é enumerável e o OE tem uma **distribuição de resultados** discreta.

→ Um optimizador determinístico, que em cada execução produz o mesmo resultado a, pode ser visto como um "caso especial":

$$P(\text{resultado} = a) = 1.$$

→ No entanto, ***a distribuição de resultados de um OE pode ser muito mais complicada!*** . . .

Avaliação do $\boxed{\textbf{Desempenho}}$ de Optimizadores Estocásticos

→ O **desempenho** de OEs (no espaço dos objectivos) tem que ver com

- a qualidade dos seus resultados, e
- o tempo que é necessário para produzir esses resultados.

(nº de avaliações da função, tempo de CPU, tempo decorrido, etc.)

→ Há grande interesse na avaliação do desempenho de OEs, porque, dada uma instância de um problema de optimização, se deseja escolher o "melhor" optimizador de entre muitas alternativas.

→ O que significa $\boxed{\textbf{bom desempenho}}$ de um OE?

- produzir resultados em pouco tempo,
- resultados de boa qualidade, ou seja, resultados que se localizam "próximo" do(s) valor(es) óptimo(s) da função objectivo.

Avaliação do $\boxed{\textbf{Desempenho}}$ de Optimizadores Estocásticos

$\boxed{\textbf{Questões}}$ relativas à qualidade dos resultados:

(a) Não se conhece o óptimo no espaço de decisão, nem o(s) valor(es) óptimo(s) da função objectivo!

$\rightsquigarrow$ Problemas de minimização: resultados melhores $\equiv$ valores menores

(b) A distribuição de resultados do mesmo OE varia em função da instância do problema de optimização!

$\rightsquigarrow$ Na prática, assume-se que o desempenho observado anteriormente noutras instâncias do mesmo problema é representativo.

(c) O significado de "resultados de boa qualidade" tem múltiplos aspectos que provêm da complexidade da distribuição de resultados.

$\rightsquigarrow$ Tema da presente aula!

Estrutura da aula

- Optimizadores mono-objectivo:
  - *Distribuições de resultados e desempenho*

- Optimizadores multi-objectivo:
  - *Distribuições de resultados*
  - *A abordagem da função de aproveitamento*
  - *A abordagem dos indicadores de qualidade*

- Notas finais

Optimizadores mono-objectivo: Distribuições de resultados e desempenho

Consideram-se os resultados de OEs produzidos no espaço dos objectivos após um determinado tempo de execução.

Optimizador determinístico mono-objectivo

- O valor mínimo da função objectivo é um escalar $x^* \in \mathbb{R}$.
- Cada execução do optimizador produz o mesmo resultado, que é um escalar $a \in \mathbb{R}$, $a \geq x^*$.
- A distribuição de resultados é uma *Distribuição de Um Ponto*:

$$P(X = a) = 1.$$

Optimizadores mono-objectivo:

Distribuições de resultados e desempenho

- Os resultados são de melhor qualidade quando o escalar a é menor.

  [caso ideal: $a = x^*$]

- Um *Optimizador 1* com resultado(s) a_1 tem melhor desempenho que um *Optimizador 2* com resultado(s) a_2

$$\iff \qquad a_1 < a_2.$$

Nos optimizadores determinísticos mono-objectivo, o significado de "resultados de boa qualidade" é evidente, pois envolve um único critério!

Optimizadores mono-objectivo:

Distribuições de resultados e desempenho

Optimizador estocástico mono-objectivo

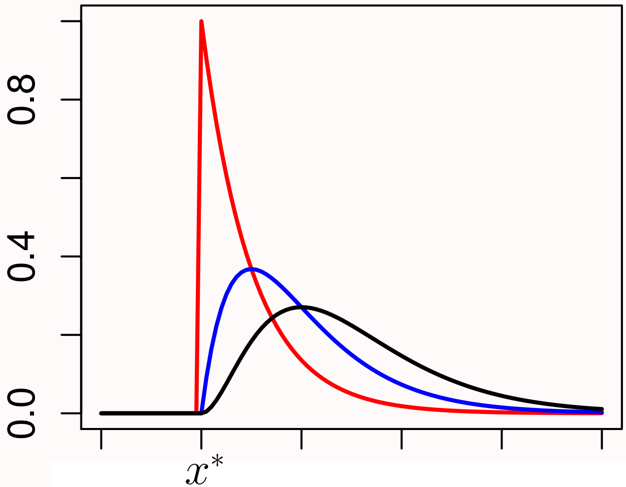
- O valor mínimo da função objectivo é um escalar $x^* \in \mathbb{R}$.
- Cada execução do OE produz um resultado aleatório que é representado por uma variável aleatória X em $\mathbb{R}$ com realizações $z \in [x^*, \infty)$.
- A distribuição de resultados é uma distribuição *univariada*, discreta ou contínua, com suporte em $\mathbb{R}^{\geq x^*}$ que pode ser caracterizada pela **função de distribuição**

$$F_X(z) = P(X \leq z)$$

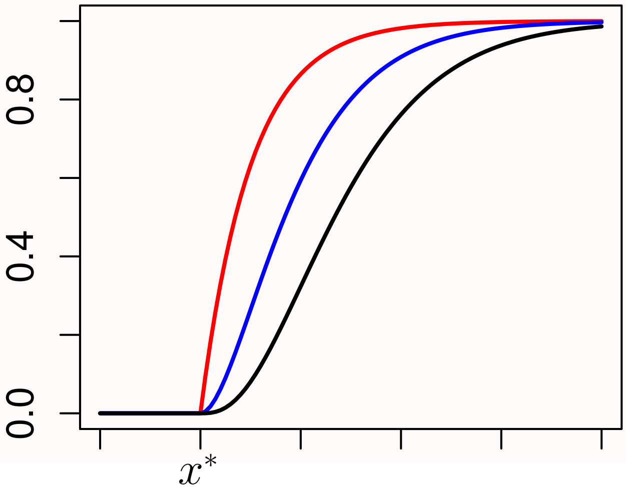
onde $F_X(z) = 0$ se $z \in (-\infty, x^*)$.

Optimizadores mono-objectivo:
Distribuições de resultados e desempenho

- Os resultados são de melhor qualidade quando a sua distribuição se concentra mais perto do valor mínimo $x^* \in \mathbb{R}$ da função objectivo ...



função de densidade



função de distribuição

$\rightsquigarrow$ Os resultados com a distribuição a vermelho são de melhor qualidade.

Optimizadores mono-objectivo:

Distribuições de resultados e desempenho

. . . , ou seja, quanto . . .

(a) menor no sentido estocástico for a variável aleatória X, ou ainda, quanto maior $F_X(z)$ para todo o $z \geq x^*$.

$$\left[\text{ caso "ideal": } F_X(z) = \boldsymbol{I}\{z \geq x^*\}\right]$$

(b) menor o valor de uma **medida de localização**, tal como:

- *média*: $\mu = \mathrm{E}(X) \geq x^*$
- *mediana*: $x_{0.5} \geq x^*$ onde $P(X \leq x_{0.5}) = 0.5$
- *α-quantil*: $x_\alpha \geq x^*$ onde $P(X \leq x_\alpha) = \alpha$

$$\left[\text{ casos ideais: } \mu = x_{0.5} = x_\alpha = x^* \right]$$

Optimizadores mono-objectivo:

Distribuições de resultados e desempenho

(c) <u>menor</u> o valor de uma **medida de dispersão**, tal como:

- *variância*: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) \geq 0$
- *amplitude interquartil*: $x_{0.75} - x_{0.25} \geq 0$

$$\left[\ \text{casos ideais: } \sigma^2 = x_{0.75} - x_{0.25} = 0\ \right]$$

⚠ Não faz sentido considerar o critério (c) <u>sem</u> ter em conta o critério (b).

⚠ A média é o *1º momento não-centrado* de uma distribuição e a variância é o *2º momento centrado* de uma distribuição.

Optimizadores mono-objectivo:

Distribuições de resultados e desempenho

Problema

$F_X(\cdot)$ e as medidas de localização/dispersão são desconhecidas!

Análise inferencial – Estimação

A função $F_X(\cdot)$ e as medidas de localização/dispersão podem ser estimadas a partir de ...

– uma *amostra aleatória (simples)* $X_1, X_2, \ldots X_n$,

– de n variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição, que representam os resultados de n execuções independentes do optimizador.

Optimizadores mono-objectivo:

Distribuições de resultados e desempenho

Consideram-se, por exemplo, os seguintes estimadores:

- *função de distribuição empírica*:

$$F_n(z) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{I}\{X_i \leq z\}$$

- *média amostral*: $\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$
- *mediana amostral*:

$$Q_{0.5} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left[X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n+2}{2})} \right] & \text{se } n \text{ é par} \\ X_{(\frac{n+1}{2})} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

onde $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ são as variáveis aleatórias da amostra ordenada.

Optimizadores mono-objectivo:

Distribuições de resultados e desempenho

- *α-quantil amostral*:

$$Q_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left[X_{(n\cdot\alpha)} + X_{(n\cdot\alpha+1)}\right] & \text{se } n \cdot \alpha \in \mathbb{N} \\ X_{(\lceil n\cdot\alpha \rceil)} & \text{se } n \cdot \alpha \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

onde $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ são as variáveis aleatórias da amostra ordenada.

- *variância amostral*: $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

- *amplitude interquartil amostral*: $Q_{0.75} - Q_{0.25}$

Como a distribuição de resultados deve ser **enviesada para a direita**, pode ser preferível considerar a mediana amostral em vez da média amostral e a amplitude interquartil amostral em vez da variância amostral.

Optimizadores mono-objectivo:
Distribuições de resultados e desempenho

- Um *Optimizador 1* com resultados X_1 tem <u>melhor</u> desempenho que um *Optimizador 2* com resultados X_2

$$\Longleftrightarrow \quad \mathbf{XXX} \quad \mathbf{???}$$

<u>Dúvida</u>

Que critério usar para formular essa afirmação de equivalência?

$\rightarrow$ <u>Rigorosamente falando</u>, deve-se considerar a **caracterização completa** das distribuições de X_1 e X_2, ou seja,

$$\mathbf{XXX}: \; F_{X_1}(z) > F_{X_2}(z) \quad \text{para todos os } z \geq x^*$$

Optimizadores mono-objectivo:

Distribuições de resultados e desempenho

→ A comparação dos estimadores de $F_{X_1}(\cdot)$ e $F_{X_2}(\cdot)$ parece "pouco prática" porque involve inúmeras comparações individuais!

... $\boxed{\text{Mas}}$ ...

é possível com os ***testes de hipóteses*** da análise estatística inferencial (e.g. o teste Kolmogorov-Smirnov para duas amostras).

→ Na prática, a comparação do desempenho de dois optimizadores também pode ser feita relativamente a um ou mais aspectos das distribuições de resultados.

⇝ e.g. teste de Mann-Whitney (medianas), teste de Levene (variâncias)

Optimizadores multi-objectivo: Distribuições de resultados

- Os valores mínimos (não-dominados) da função objectivo dão origem a uma *fronteira óptima (de Pareto)* $\mathcal{X}^*$ em $\mathbb{R}^d$.

- Em cada execução, o optimizador produz múltiplos resultados aleatórios em $\mathbb{R}^d$ que se representam por um **conjunto aleatório de pontos não-dominados** (conjunto APN)

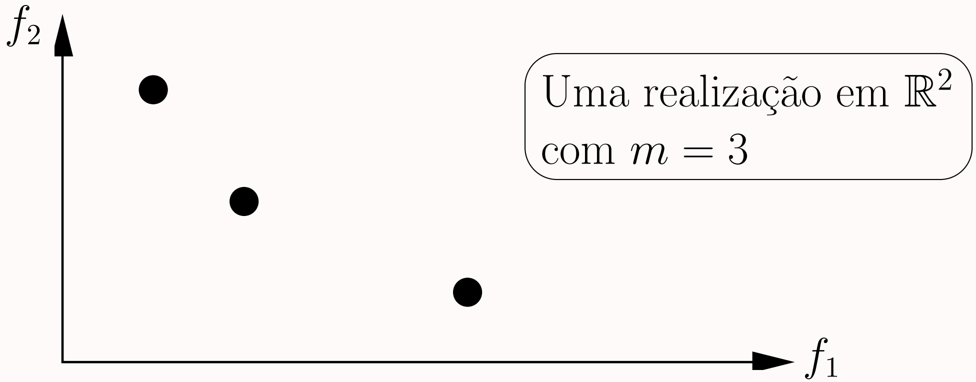
$$\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_M \in \mathbb{R}^d : \; P(X_i \leq X_j) = 0, \; i \neq j\},$$

sendo

– $X_1, X_2, \ldots$ vectores aleatórios em $\mathbb{R}^d$ e

– M uma variável aleatória em $\mathbb{N}$.

Optimizadores multi-objectivo: Distribuições de resultados



Características de um conjunto APN $\mathcal{X}$:

$\rightarrow$ Os pontos (vectores) $x_1, x_2, \ldots x_m$ de uma realização de $\mathcal{X}$ são não-dominados no sentido de Pareto.

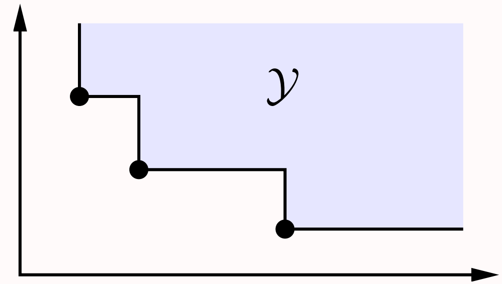
$\rightarrow$ Os vectores aleatórios $X_1, X_2, \ldots X_M$ são dependentes.

$\rightarrow$ $\mathcal{X}$ é fechado e é "não-estacionário".

Optimizadores multi-objectivo: Distribuições de resultados

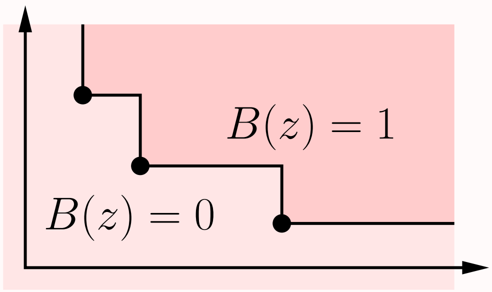
Representações alternativas de um conjunto APN $\mathcal{X}$:

→ o conjunto aleatório fechado
(*"conjunto atingido"*)



$$\mathcal{Y} = \{z \in \mathbb{R}^d \mid X_1 \leq z \vee \ldots \vee X_M \leq z\}$$

→ o campo aleatório binário



$$\{B(z), z \in \mathbb{R}^d\} = \{\boldsymbol{I}\{z \in \mathcal{Y}\}, z \in \mathbb{R}^d\}$$

Optimizadores multi-objectivo: Distribuições de resultados

- A distribuição de resultados é bastante complexa pois compreende
  - as distribuições multivariadas de $X_1, X_2, \ldots$
  - a distribuição univariada discreta de M, e
  - a dependência entre $X_1, X_2, \ldots$.

Dado $M \leq m^*$, ou seja, dado que o optimizador não produz mais que m^* resultados por execução, a distribuição de $\mathcal{X}$ pode ser caracterizada pela **função de aproveitamento de ordem m^***

$$\boxed{\alpha_{\mathcal{X}}^{(m^*)}(z_1, \ldots, z_{m^*}) = P\Big(\mathcal{X} \trianglelefteq z_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \mathcal{X} \trianglelefteq z_{m^*}\Big)}$$

onde

$$[\mathcal{X} \trianglelefteq z] \ \text{ significa } \big[X_1 \leq z \ \vee \ X_2 \leq z \ \vee \ldots \vee \ X_M \leq z\big].$$

Optimizadores multi-objectivo: Distribuições de resultados

Por palavras, $\alpha_{\mathcal{X}}^{(m^*)}(z_1, \ldots, z_{m^*})$ é ...

> "a probabilidade de atingir todas as metas $z_1, \ldots, z_{m^*}$ numa <u>única</u> execução do optimizador".

- Os resultados do optimizador são de <u>melhor</u> qualidade quando a sua distribuição se <u>concentra mais perto</u> da fronteira óptima $\mathcal{X}^*$ em $\mathbb{R}^d$,

  > ... , ou seja, quanto ...

  <u>menor</u> no sentido estocástico for o conjunto APN $\mathcal{X}$, ou ainda, quanto <u>maior</u> $\alpha_{\mathcal{X}}^{(m^*)}(z_1, \ldots, z_{m^*})$ para todo o vector $z_i \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{X}^* \trianglelefteq z_i$.

Optimizadores multi-objectivo: Distribuições de resultados

A complexidade da distribuição dos resultados . . .

– torna difícil a sua ilustração gráfica para $m^* > 2$.

– deu origem a muitos critérios de desempenho para optimizadores multi-objectivo!

Duas principais abordagens

1. **Abordagem da função de aproveitamento** que é baseada em conceitos da teoria de conjuntos aleatórios, tendo em conta a não-dominância entre os elementos de um conjunto APN.
2. **Abordagem dos indicadores de qualidade** que transforma as realizações de um conjunto APN em valores em $\mathbb{R}$ e estuda a distribuição univariada desses valores, (geralmente) em termos da sua média.

Optimizadores multi-objectivo: A abordagem da função de aproveitamento

- O desempenho de um optimizador multi-objectivo é avaliado na sua totalidade através de $\alpha_{\mathcal{X}}^{(m^*)}(z_1, \ldots, z_{m^*})$, onde m^* é o número máximo de resultados X_i por execução.

- Uma descrição de tipo "média" da distribuição de $\mathcal{X}$ é possível com a **função de aproveitamento** (de ordem 1)

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathcal{X}}^{(1)}(z) = \alpha_{\mathcal{X}}(z) &= P\big(\mathcal{X} \trianglelefteq z\big) \\ &= P\big(X_1 \leq z \ \vee \ X_2 \leq z \ \vee \ldots \vee \ X_M \leq z\big),\end{aligned}$$

ou seja, com a

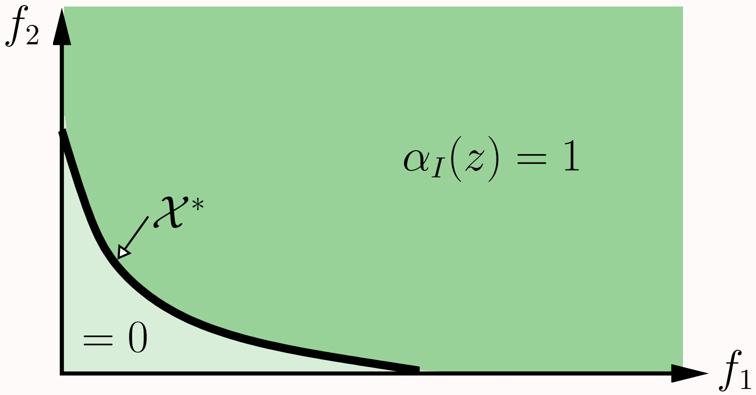
"probabilidade de atingir cada meta $z \in \mathbb{R}^d$ numa única execução do optimizador".

Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem da função de aproveitamento

Tal como a média μ, a função $\alpha_{\mathcal{X}}(\cdot)$ não descreve a distribuição de $\mathcal{X}$ na sua totalidade — a não ser que $\mathcal{X} = \{X\}$. Nesse caso, $\alpha_{\mathcal{X}}(\cdot)$ reduz-se a uma função de distribuição $F_X(\cdot)$!

$\rightarrow$ O caso ideal quanto ao desempenho em termos de $\alpha_{\mathcal{X}}(\cdot)$ é a *função de aproveitamento ideal*: $\alpha_I(z) = \boldsymbol{I}\{\mathcal{X}^* \trianglelefteq z\}$.



Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem da função de aproveitamento

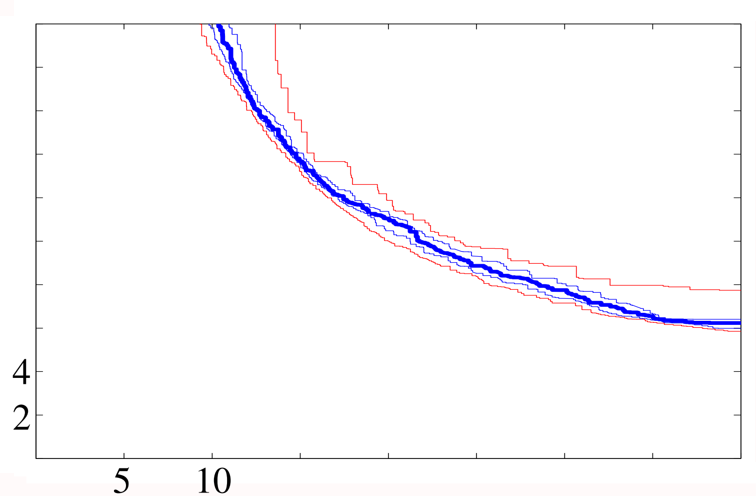
$\rightarrow$ $\boxed{\text{Estimação}}$

A função $\alpha_{\mathcal{X}}(\cdot)$, que é desconhecida, pode ser estimada através da *função de aproveitamento empírica*

$$\alpha_n(z) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{I}\{\mathcal{X}_i \trianglelefteq z\}$$

Ilustração de um caso bi-objectivo ($n = 21$):

Curvas de nível ϵ, 0.25, 0.5, 0.75, e $1 - \epsilon$



Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem da função de aproveitamento

→ $\boxed{\text{Teste de hipóteses}}$

Um teste de tipo "*Kolmogorov-Smirnov*" permite comparar duas funções de aproveitamento de dois optimizadores A e B.

– Problema de teste (bilateral):

$$H_0 : \ \alpha_{\mathcal{X}_A}(z) = \alpha_{\mathcal{X}_B}(z) \quad \text{para todo o } z \in \mathbb{R}^d$$

versus

$$H_1 : \ \alpha_{\mathcal{X}_A}(z) \neq \alpha_{\mathcal{X}_B}(z) \quad \text{para pelo menos um } z \in \mathbb{R}^d,$$

Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem da função de aproveitamento

– Regra de decisão do teste bilateral: Para o nível de significância $\alpha \in (0, 1)$, rejeitar H_0 se

$$D_{n,m} = \sup_{z \in \mathbb{R}^d} \left| \alpha_n^A(z) - \alpha_m^B(z) \right| > d_{n;m;1-\alpha},$$

onde $d_{n;m;1-\alpha}$ pode ser aproximado através de simulação (*teste de permutações*).

Também é possível formular testes unilaterais.

Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem da função de aproveitamento

- Uma descrição de tipo "mediana" da distribuição de $\mathcal{X}$ é possível através do conjunto

$$V_{0.5} = \{z \in \mathbb{R}^d \mid \alpha_{\mathcal{X}}(z) \geq 0.5\}$$

(*mediana Vorob'ev* do conjunto atingido)

$$\left[\text{caso ideal: } V_{0.5} = \{z \in \mathbb{R}^d \mid \mathcal{X}^* \trianglelefteq z\}\right]$$

⚠ Não proporciona mais informação do que a função de aproveitamento $\alpha_{\mathcal{X}}(\cdot)$.

Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem da função de aprovietamento

- A descrição de tipo "variância" com a *função de variância*

$$\mathrm{Var}_{\mathcal{X}}(z) = \alpha_{\mathcal{X}}(z) - [\alpha_{\mathcal{X}}(z)]^2$$

também não fornece informação adicional, porque é determinada exclusivamente pela função de aproveitamento $\alpha_{\mathcal{X}}(\cdot)$.

- Mais informação sobre a distribuição de $\mathcal{X}$ e, portanto, sobre o desempenho de um optimizador multi-objectivo
  – diz respeito à dependência entre $X_1, X_2, \ldots X_M$, e
  – é capturada pelas funções de aproveitamento de ordem ≥ 2.

Optimizadores multi-objectivo:
A abordagem da função de aproveitamento

Dúvida

– Existem muitas funções de aproveitamento de ordem ≥ 2, (no total: $m^* - 1$)

– e a sua complexidade aumenta gradualmente! ...

➽ ... $\boxed{\text{Até que ordem vale a pena considerá-las?}}$

Resposta

Não é claro!

No entanto, é certamente interessante considerar a chamada *função de covariância*

Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem da função de aproveitamento

- Uma descrição de tipo "covariância" da distribuição do conjunto APN $\mathcal{X}$, baseada na função de aproveitamento de **2ª ordem**, é possível através da *função de covariância*

$$\mathrm{Cov}_{\mathcal{X}}(z_1, z_2) = \alpha^{(2)}_{\mathcal{X}}(z_1, z_2) - \alpha_{\mathcal{X}}(z_1) \cdot \alpha_{\mathcal{X}}(z_2)$$

A função mostra em que regiões do espaço dos objectivos **duas metas** têm tendência a ser ...

– atingidas conjuntamente, na mesma execução do optimizador.

$\rightsquigarrow$ **covariância positiva**

– atingidas em alternativa uma à outra, na mesma execução do optimizador. $\rightsquigarrow$ **covariância negativa**

Optimizadores multi-objectivo:

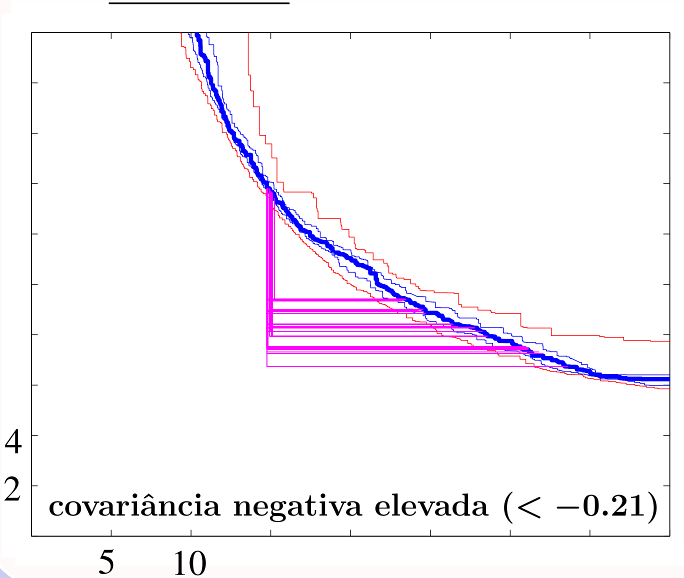
A abordagem da função de aproveitamento

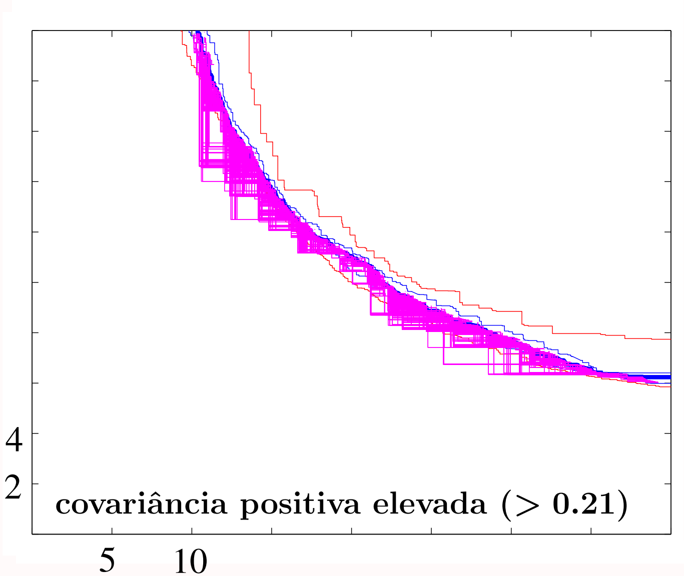
A função $\mathrm{Cov}_{\mathcal{X}}(\cdot,\cdot)$ tem o valor **Zero**, quando . . .

– as duas metas podem ser atingidas independentemente.

– uma das duas metas nunca é atingida (ou ambas o são sempre).

Ilustração da função de covariância empírica:





Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem da função de aproveitamento

$\rightarrow$ Casos "não-ideais":

– Covariância **positiva** entre metas **distantes**.

$\Longrightarrow$ Em cada execução, o optimizador aproxima toda a fronteira $\mathcal{X}^*$ de maneira equilibrada, umas vezes melhor que outras.

– Covariância **negativa** entre metas **distantes**.

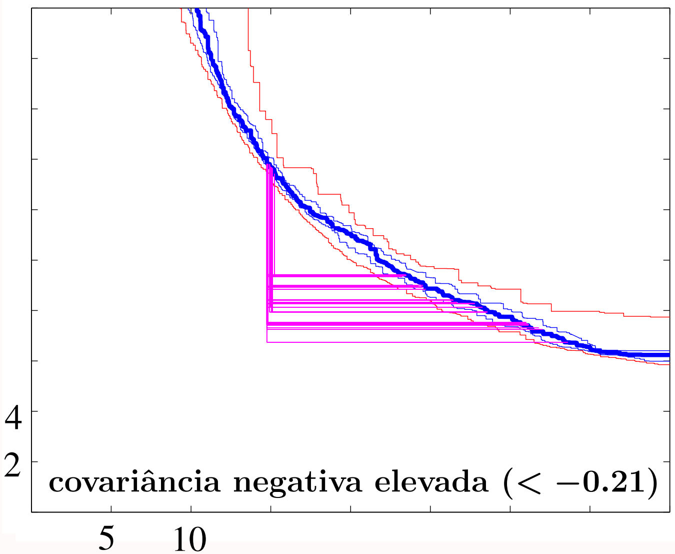
$\Longrightarrow$ Em cada execução, o optimizador aproxima apenas uma região (pequena) da fronteira $\mathcal{X}^*$, diferente em cada execução.

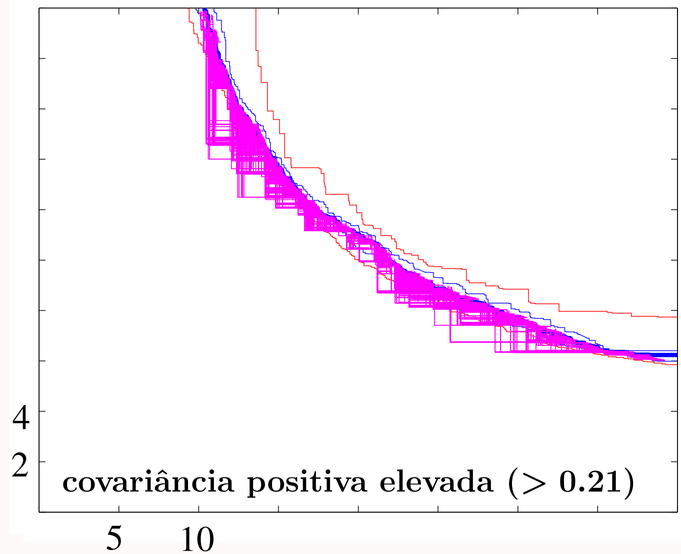
A covariância é sempre positiva para duas metas próximas e tem o valor da variância para duas metas iguais.

Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem da função de aproveitamento

Então ...





– Existem valores da função de covariância negativos elevados entre algumas metas distantes.

– Não existem valores da função de covariância positivos elevados entre metas distantes.

Optimizadores multi-objectivo: A abordagem dos indicadores de qualidade

Para evitar a complexidade da distribuição de um conjunto APN de resultados no espaço dos objectivos $\mathbb{R}^d$ ...

- transformam-se as realizações de $\mathcal{X}$ em valores em $\mathbb{R}$, e
- considera-se a respectiva distribuição univariada, geralmente, em termos da sua média.

Exemplos tratados em seguida:

1. Indicador ϵ unário
2. Indicador da fração atingida
3. Indicador de hipervolume

Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem dos indicadores de qualidade

- **Indicador ϵ unário** (com conjunto de referência Z_{ref}):

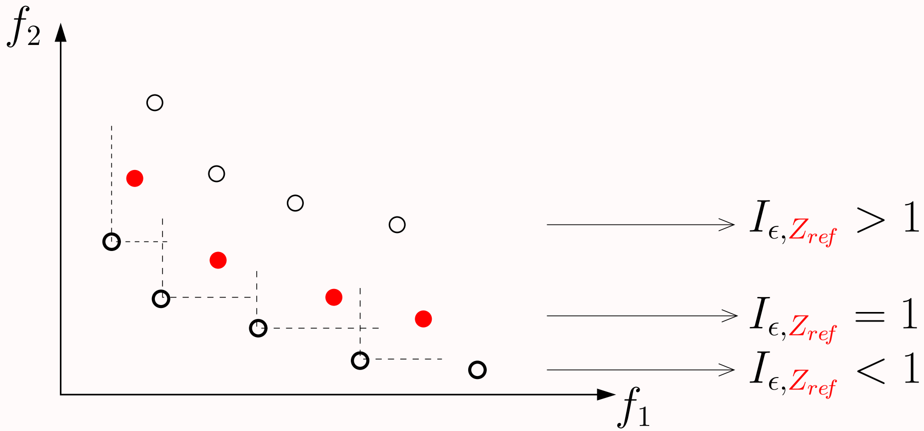
→ Definição: Seja $Z_{ref} = \{z_1^{ref}, z_2^{ref}, \ldots, z_k^{ref}\}$ com pontos não-dominados em $\mathbb{R}^d$.

$$I_{\epsilon, Z_{ref}}(\mathcal{X}) = \inf \left\{ \epsilon \in \mathbb{R}^+ \;:\; \prod_{i=1}^{k} \boldsymbol{I}\{\mathcal{X} \trianglelefteq \epsilon \cdot z_i^{ref}\} = 1 \right\}$$

→ O indicador tem realizações em $(0, \infty)$, onde um valor menor indica melhor qualidade do conjunto de resultados realizado.

Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem dos indicadores de qualidade



Ideia:

– Quanto é que Z_{ref} se tem que deslocar para cima para a realização de $\mathcal{X}$ atingir todos os elementos z_i^{ref} ?

– Até onde é que Z_{ref} se pode deslocar para baixo para a realização de $\mathcal{X}$ ainda atingir todos os elementos z_i^{ref} ?

Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem dos indicadores de qualidade

Em termos absolutos, Z_{ref} deverá representar um nível de qualidade minimamente satisfatório para um conjunto de resultados. Assim,

– um valor médio do indicador $\boxed{> 1}$ indicará uma qualidade não-satisfatória.

– um valor médio do indicador $\boxed{\leq 1}$ indicará uma qualidade satisfatória.

??? Mas, por que não usar antes a mediana da distribuição deste indicador, cujo valor é

$$\inf \left\{ \epsilon \in \mathbb{R}^+ : \ \alpha_{\mathcal{X}}^{(k)}(\epsilon \cdot z_1^{ref}, \ldots, \epsilon \cdot z_k^{ref}) = 0.5 \right\} \qquad \textbf{?}$$

Optimizadores multi-objectivo:
A abordagem dos indicadores de qualidade

- **Indicador da fração atingida** (com conjunto de referência Z_{ref}):

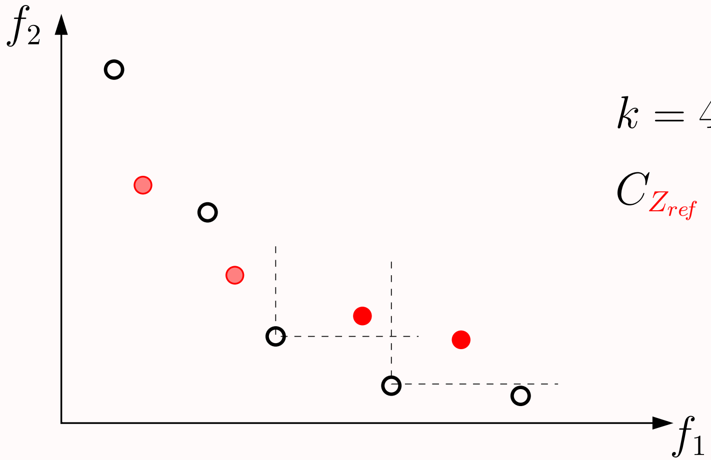
  → Definição: Seja $Z_{ref} = \{z_1^{ref}, z_2^{ref}, \ldots, z_k^{ref}\}$ com pontos não-dominados em $\mathbb{R}^d$.

$$C_{Z_{ref}}(\mathcal{X}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{I}\{\mathcal{X} \trianglelefteq z_i^{ref}\}$$

  → O indicador tem realizações em $[0, 1]$, onde um valor maior indica melhor qualidade do conjunto de resultados realizado.

Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem dos indicadores de qualidade



$k = 4$

$C_{Z_{ref}} = 2/4 = 0.5$

→ Em termos <u>absolutos</u>, dever-se-á escolher uma fração $C^*_{Z_{ref}}$ que represente uma qualidade satisfatória, dado Z_{ref}.

→ A <u>média</u> da distribuição do indicador tem a forma

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \alpha_{\mathcal{X}}(z_i^{ref})$$

Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem dos indicadores de qualidade

- **Indicador de hipervolume** (com vector de referência z_{ref}):

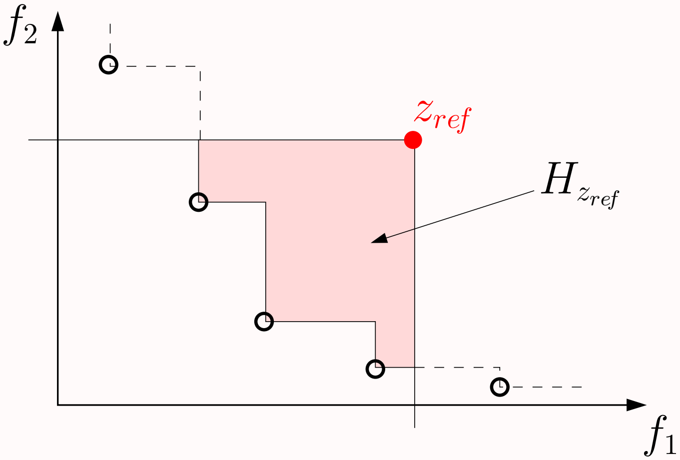
$\rightarrow$ Definição: Com $z_{ref} \in \mathbb{R}^d$

$$H_{z_{ref}}(\mathcal{X}) = \int \boldsymbol{I}\{\mathcal{X} \trianglelefteq z\} \cdot \boldsymbol{I}\{z \leq z_{ref}\}\, dz$$

$\rightarrow$ O indicador tem realizações em $[0, H_{z_{ref}}(\mathcal{X}^*)]$, onde um valor maior indica melhor qualidade do conjunto de resultados realizado.

Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem dos indicadores de qualidade



→ Em termos <u>absolutos</u>, dever-se-á escolher um valor $H^*_{z_{ref}}$ que represente uma qualidade satisfatória, dado z_{ref}.

→ A <u>média</u> da distribuição do indicador tem a forma

$$\int \alpha_{\mathcal{X}}(z) \cdot \boldsymbol{I}\{z \leq z_{ref}\}\, dz$$

Optimizadores multi-objectivo:

A abordagem dos indicadores de qualidade

- Testes de hipóteses (bilaterais ou unilaterais) permitem comparar, por exemplo, as médias, medianas, ou as distribuições completas de um indicador, relativamente a dois optimizadores.

- Seria interessante investigar quais dos aspectos "localização", "variabilidade", e "dependência entre os elementos X_i" do conjunto APN $\mathcal{X}$ são avaliados por cada indicador, ou seja …

  $\boxed{\text{Qual é a relação entre um indicador e a função de aproveitamento (de ordem } k\text{)?}}$

Notas finais

- O desempenho de optimizadores também pode ser estudado em termos da **qualidade** dos resultados juntamente com o **tempo** necessário para chegar a esses resultados.

  $\rightsquigarrow$ Na abordagem da função de aproveitamento, basta considerar o tempo como mais um objectivo.

- A função de aproveitamento empírica (de ordem k) é um estimador *não-paramétrico*. Seria interessante encontrar também formulações *paramétricos* para essa função.

- As implementações computacionais continuam em desenvolvimento, havendo ainda limitações na aplicação prática destas funções.

- . . .

"Es gibt viel zu tun, packen wir es an!"

Obrigada!